EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2024
Proba E.c)
Matematică M_*șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test de antrenament

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{a_5}{a_2}=q^3=27$, rezultă rația progresiei geometrice este $q=3$	**3p**
	$a_1=\frac{a_2}{q}$, rezultă $a_1=\frac{2}{3}$	**2p**
2.	Din relațiile lui Viète $x_1+x_2=3,\ x_1\cdot x_2=1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3^2-2=7$	**3p**
3.	$81=3^4,\ \log_3 81=4,\ \log_9 3^4=2$	**3p**
	$\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-1$	**2p**
4.	Multiplii lui 12 de două cifre sunt $12,24,36,48,60,72,84,96$, dintre care divizori ai numărului 360 sunt numerele $12,24,36,60,72$. Sunt 5 cazuri favorabile.	**2p**
	Sunt 90 de cazuri posibile, $P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$	**3p**
5.	$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=-1$, ecuația dreptei BC este $y-y_B=m_{BC}\left(x-x_B\right)$, deci $BC:\ x+y-3=0$	**3p**
	$d\left(A,BC\right)=\frac{\lvert ax_A+by_A+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\lvert -6+1-3\rvert}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$	**2p**
6.	Din teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=28$, rezultă $BC=2\sqrt{7}$	**3p**
	Din teorema sinusurilor $\frac{BC}{\sin A}=2R,\ R=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x & x-2 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}=$ $=(x+1)\cdot(x-2)\cdot 1+x\cdot x\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1-1\cdot(x-2)\cdot 1-x\cdot 1\cdot 1-x\cdot 1\cdot(x+1)=x^2-4x+1$ $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\}$	**3p** **2p**
b)	$A(x+2)=\begin{pmatrix} x+3 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{pmatrix}$, $A(x-2)=\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ x-2 & x-4 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \end{pmatrix}$, $2A(x)=\begin{pmatrix} 2x+2 & 2 & 2 \\ 2x & 2x-4 & 2 \\ 2 & 2x & 2 \end{pmatrix}$ $A(x+2)+A(x-2)=\begin{pmatrix} 2x+2 & 2 & 2 \\ 2x & 2x-4 & 2 \\ 2 & 2x & 2 \end{pmatrix}$, concluzia	**3p** **2p**
c)	$A_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}\left\|\det A(n)\right\|=\frac{1}{2}\left\|n^2-4n+1\right\|$ $A_{\Delta PQR}=3\Leftrightarrow n^2-4n+1\in\{-6,6\}$ 1)$n^2-4n+1=6\Leftrightarrow n^2-4n-5=0\Leftrightarrow n\in\{-1,5\}$ 2)$n^2-4n+1=-6\Leftrightarrow n^2-4n+7=0,$ nu are solutii reale	**2p** **3p**
2.a)	Demonstrează că $xy-7x-7y+56=(x-7)(y-7)+7,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**5p**
b)	Alegând de exemplu $y=\frac{1}{3}, x*y=1$ se obține $(x-7)\left(-\frac{20}{3}\right)+7=1\Leftrightarrow x-7=\frac{9}{10}\Leftrightarrow x=\frac{79}{10}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	**2p** **3p**
c)	$a*7=7,$ pentru orice a $\in\mathbb{R}$ și $7*b=7,$ pentru orice $b\in\mathbb{R}$ $\underbrace{1*2*...*6}_{a}*7*\underbrace{8*9*...*2024}_{b}\overset{asoc}{=}(a*7)*b=7*b=7$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+1)'\cdot\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot(x+1)}{x^2+1}=$ $\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	**2p** **3p**
b)	Ținând cont de tabelul de variație, 1 punct de maxim, $f(1)=\sqrt{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1, f$ funcție continuă, rezultă $\operatorname{Im} f=\left(-1,\sqrt{2}\right]$	**2p** **3p**
c)	Dacă $x\in(0,+\infty),$ atunci $f(x)\in\left(1,\sqrt{2}\right)$	**2p**

	$\frac{1}{x}\in(0,+\infty),\ f\left(\frac{1}{x}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right]\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\in\left(2,2\sqrt{2}\right]$	**3p**
2.a)	Prin operații și compunere cu funcții derivabile se obține că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=(ax+b)e^{x^2}$ este derivabilă și $F'(x)=(ax+b)'e^{x^2}+(ax+b)\left(e^{x^2}\right)'=\left(2ax^2+2bx+a\right)e^{x^2}$	**3p**
	$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a=2,b=-3$	**2p**
b)	$F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-6x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$	**2p**
	f strict crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, f strict descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$, f strict crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$G(x)=F(x)+k,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow G(x)=(2x-3)e^{x^2}+k,\forall x\in\mathbb{R}$. $G(1)=0\Rightarrow k=e$	**2p**
	$\int_0^1 f(x)G(x)dx=\int_0^1 G'(x)G(x)dx=\left.\frac{G^2(x)}{2}\right\|_0^1=-\frac{(e-3)^2}{2}$	**3p**